ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Να γράψετε την παράσταση $\mathrm{A}=k^4+4$, όπου k θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών. ***Μονάδες 2***

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

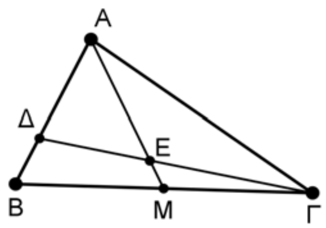
$$\mathrm{K}=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\dots\cdot\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\dots\cdot\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Μονάδες 3

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$. Έστω M το μέσο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει τη διάμεσο AM στο σημείο E, τότε ισχύει ότι $\mathrm{A}\Delta=\Delta\mathrm{E}$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AB}=\Gamma\mathrm{E}$. ***Μονάδες 5***



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $\mathrm{A}=\overline{abcd}=a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a\geq 7$ και $a>b>c>d>0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $\mathrm{B}=\overline{dcba}=d\cdot 10^3+c\cdot 10^2+b\cdot 10+a$, που προκύπτει από τον A με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει όλα τα ψηφία του περιττά, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Μονάδες 5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x,y,z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=1.$$

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013
Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right),\ n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο a_{2013}.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση: $y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{160}$ τέτοια ώστε $\left|\mathrm{A}_i\right| = i,\ i = 1, 2, \ldots, 160$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$ με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου M_1. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο M_2. Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{160}$ ορίζοντας έτσι τα σύνολα $\mathrm{M}_3, \ldots, \mathrm{M}_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και έστω Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$ (διαφορετικό από το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{BO\Delta}$, έστω c_1, τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ στο σημείο K και την AB στο σημείο Z. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{\Gamma O\Delta}$, έστω c_2, τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ στο σημείο M και την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E. Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AEZ, έστω c_3, τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και KMN είναι ίσα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 45 λεπτά.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία***