ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΡΤΑΣ
http://emeartas.byethost7.com
e-mail: emeartas@hotmail.gr
Εισήγηση θεμάτων: Βασιλείου Π.-Ζώτος Ε.-Θάνος Π.-Μήτσιος Γ.-Μπέλος Κ.-Παπαδημητρίου Θ.-Παππάς Ε.

ΕΤΗΣΙΟΣ ΤΟΠΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΕΙΑ 2012

ΘΕΜΑ Α

Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με διάμεσο **ΑΜ** και **Κ** το μέσο της **ΑΜ**. Η **ΒΚ** τέμνει την **ΑΓ** στο **Λ**. Να δειχθούν:

$Α_1$. **ΑΓ=3ΑΛ** **(Μονάδες 5)**

$Α_2$. **ΒΛ=4ΚΛ** **(Μονάδες 7)**

Αν επιπλέον είναι **(ΚΛΜ)=1** τ.μ και **ΑΜ.ΒΛ=16** τ.μ να δειχθούν:

$Α_3$. **(ΑΒΓ)=12** τ.μ **(Μονάδες 6)**

$Α_4$. **ΑΜ$\perp$ΒΛ** **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Β

$Β_1$. Αν $\alpha = 4\log_3\sqrt{3\sqrt{3}} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 7}$ αποδείξτε ότι **α=10**

(Μονάδες 7)

$Β_2$. Για **α=10** να λυθεί η εξίσωση:

$$Z(x) = e^{0,2\alpha x} - 4e^{x} + 0,3\alpha = 0$$ **(Μονάδες 8)**

$Β_3$. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{Z(x)}{e^x-3}.\left(x-\ln\frac{1}{2}\right).\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{16}\right] \geq 0$$ **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Έστω $\alpha=\eta\mu\chi$, $\beta=1$, $\gamma=\sigma\upsilon\nu^2\chi$ να δείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός **χ** ώστε **α, β, γ** να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου **(Μονάδες 7)**

Γ₂. Έστω **β, α, γ** διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και $\chi \in (0, \frac{\pi}{2})$ να βρεθεί ο **χ.** **(Μονάδες 8)**

Γ₃. Για την παραπάνω τιμή του **χ** να βρεθούν οι τιμές του **θ**, αν:

$$\eta\mu(\chi.e^{\theta+\ln 4}) + 1 = 0$$ **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Δ

Ο πληθυσμός μιας αποικίας μικροοργανισμών περιγράφεται από την συνάρτηση **f** με τύπο **f(t),** για τον οποίο ισχύει:

$$\ln f(t)=\ln c + \alpha t + \beta, \text{ όπου } t \geq 0$$

Στο συγκεκριμένο τύπο **t** είναι ο χρόνος σε ώρες και **c** μια σταθερά, η οποία είναι η λύση της εξίσωσης :

$$2^x(2^{-10}-1) = 2^{10^4-10} - e^{10^4\ln 2}$$

Αν ισχύουν $f(4) = 2f(2)$ και $f(6) + f(8) = 10^4 . 24 . e^{50}$, τότε:

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $c=10^4$, $\alpha = \ln\sqrt{2}$ και $\beta = 50$.

(Μονάδες 13)

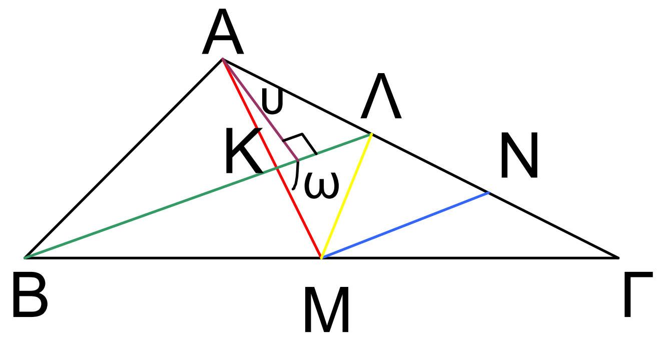
Δ₂. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο πληθυσμός θα αποτελείται από $10^4 . e^{60}$ μικροοργανισμούς. **(Μονάδες 12)**

Καλή επιτυχία

Ενδεικτικές Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A_1.



Έστω **Ν** μέσο **ΛΓ**, τότε στο τρίγωνο **ΒΛΓ Μ, Ν** μέσα των πλευρών **ΒΓ, ΛΓ** αντίστοιχα επομένως **ΜΝ//ΒΛ**.
Στο τρίγωνο **ΜΑΝ** έχουμε: **ΚΛ//ΜΝ** και **Κ** μέσο **ΑΜ** άρα **Λ** μέσο του **ΑΝ**
Συνεπώς **ΑΛ=ΛΝ=ΝΓ** δηλαδή **ΑΓ=3ΑΛ.**

A_2. Είναι $(\text{ΑΜΓ}) \overset{A_1}{=} 3(\text{ΜΑΛ}) = 6(\text{ΚΑΛ})$

$$(\text{ΑΒΓ}) = 2(\text{ΑΜΓ}) = 12(\text{ΚΑΛ})$$

Ενώ $(\text{ΒΑΛ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{3}12(\text{ΚΑΛ}) = 4(\text{ΚΑΛ})$ άρα

$$\frac{1}{2}\text{ΒΛ}.\upsilon = 4\frac{1}{2}\text{ΚΛ}.\upsilon \Leftrightarrow \text{ΒΛ} = 4\text{ΚΛ}$$

A_3. $(\text{ΚΑΛ}) = (\text{ΚΛΜ}) = 1$τ.μ άρα $(\text{ΑΒΓ}) = 12(\text{ΚΑΛ}) = 12$τ.μ

A_4. $(\text{ΚΛΜ}) = \frac{1}{2}\text{ΚΛ}.\text{ΚΜ}.\eta\mu\omega$ ενώ $\text{ΚΛ}.\text{ΚΜ} = \frac{1}{4}\text{ΒΛ}.\frac{1}{2}\text{ΑΜ} = \frac{16}{8} = 2$

Επομένως $1 = \frac{1}{2}.2.\eta\mu\omega \Leftrightarrow \eta\mu\omega = 1$ δηλαδή $\omega = 90^o$ άρα **ΑΜ**$\perp$**ΒΛ.**

ΘΕΜΑ Β

B_1.

$$\alpha = 4\log_3\sqrt{3\sqrt{3}} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 7} = 4\log_3 3^{\frac{3}{4}} + 2^{\log_2 7}$$

$$= 4.\frac{3}{4}\log_3 3 + 7 = 4.\frac{3}{4} + 7 = 3 + 7 = 10$$

B_2. Για **α=10** η εξίσωση γράφεται:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \ln 3$$

Β₃. Η ανίσωση γράφεται

$$\frac{Z(x)}{e^x-3}.\ (x-\ln\frac{1}{2}).[(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{16}]\ \geq 0 \Leftrightarrow (e^x-1)(x+\ln 2).[(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{16}]\ \geq 0$$

με $x \neq \ln 3$

x	$-\infty$	$-\ln 2$		0		$\ln 3$		4		$+\infty$
$x+\ln 2$	-	0	+		+	‖	+		+	
e^x-1	-		-	0	+	‖	+		+	
$(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{16}$	+		+		+	‖	+	0	-	
$P(x)$	+	0	-	0	+	‖	+	0	-	

Άρα $x \in (-\infty, -\ln 2]U[0, \ln 3)\ U\ (\ln 3, 4\ ]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Είναι $\alpha=\eta\mu\chi$, $\beta=1$, $\gamma=\sigma\upsilon\nu^2\chi$ αν **α, β, γ** να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου τότε

2β = α + γ $\Leftrightarrow 2 = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi$ άτοπο γιατί **-1** $\leq$ **ημχ** $\leq$ **1** και

-1 $\leq$ **συνχ** $\leq$ **1** και $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$ (Δεν μπορεί να είναι **ημχ=συνχ=1**)

Γ₂. Αφού **β, α, γ** διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα ισχύει:

$\alpha^2 = \beta\gamma \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi = \sigma\upsilon\nu^2\chi \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$ ή $\eta\mu\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow$

$\chi=\frac{\pi}{4}$ **αδύνατη στο** $(0, \frac{\pi}{2})$

Γ₃. **Για** $\chi = \frac{\pi}{4}$ **η εξίσωση γράφεται:**

$$\eta\mu(\frac{\pi}{4}.e^{\theta}e^{\ln 4}) + 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu(\frac{\pi}{4}.4e^{\theta}) = -\ 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(\pi e^{\theta}) = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \pi e^{\theta} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\theta} = \frac{4\kappa+3}{2} \Leftrightarrow\ \theta = \ln\frac{4\kappa+3}{2},\ \text{'οπου } \kappa \in N$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Είναι $2^x(2^{-10}-1) = 2^{10^4-10} - e^{10^4\ln 2} \Leftrightarrow 2^{x-10} - 2^x = 2^{10^4-10} - e^{\ln 2^{10^4}} \Leftrightarrow$

$$2^{x-10} - 2^x = 2^{10^4-10} - 2^{10^4} \Leftrightarrow \frac{2^x}{2^{10}} - 2^x = \frac{2^{10^4}}{2^{10}} - 2^{10^4} \Leftrightarrow$$

$$2^x\left(\frac{1}{2^{10}}-1\right) = 2^{10^4}\left(\frac{1}{2^{10}}-1\right) \Leftrightarrow 2^x = 2^{10^4} \Leftrightarrow x = 10^4$$ άρα $C = 10^4$.

Άρα

$$f(t)=e^{\ln c+\alpha t+\beta} \Leftrightarrow f(t)=e^{\ln c}e^{\alpha t+\beta} \Leftrightarrow f(t)=ce^{\alpha t+\beta} \Leftrightarrow f(t)=10^4e^{\alpha t+\beta}$$

Επομένως έχουμε:

$$\left.\begin{array}{c} f(4) = 2f(2) \\ f(6)+f(8) = 10^4 \,.\, 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 10^4e^{4\alpha+\beta} = 2.10^4e^{2\alpha+\beta} \\ 10^4e^{6\alpha+\beta}+10^4e^{8\alpha+\beta} = 10^4 \,.\, 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{e^{4\alpha+\beta}}{e^{2\alpha+\beta}} = 2 \\ e^{6\alpha+\beta}+e^{8\alpha+\beta} = 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} e^{2\alpha} = 2 \\ e^{6\alpha+\beta}+e^{8\alpha+\beta} = 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 2\alpha = \ln 2 \\ e^{3\ln 2+\beta}+e^{4\ln 2+\beta} = 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = \ln\sqrt{2} \\ e^{\ln 8+\beta}+e^{\ln 16+\beta} = 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = \ln\sqrt{2} \\ e^{\ln 8}e^{\beta}+e^{\ln 16}e^{\beta} = 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = \ln\sqrt{2} \\ 8e^{\beta}+16e^{\beta} = 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = \ln\sqrt{2} \\ 24e^{\beta} = 24 \,.\, e^{50} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha = \ln\sqrt{2} \\ \beta = 50 \end{array}$$

Δ₂. Είναι $f(t)=10^4e^{\ln\sqrt{2}\,t+50}$ επομένως

$$f(t)=10^4.e^{60} \Leftrightarrow 10^4e^{\ln\sqrt{2}\,t+50} = 10^4.e^{60} \Leftrightarrow \ln\sqrt{2}\,t+50 = 60 \Leftrightarrow$$

$$\ln\sqrt{2}\,t = 10 \Leftrightarrow t = \frac{10}{\ln\sqrt{2}}$$